الأستاذ : صالح بن الصغير

تقنية مهمة في اللوغاريتم النبيري

ثانية باك علوم

سلسلة : X- Math

طرائق / تمارين تطبيقية

طريقة 5 : كيف نحل معادلة أو متراجحة عندما يكون المجهول في الأس مثل $k^n < 10^{-p}$ حيث n هو المجهول؟

- نتحقق من أن طرفي المعادلة أو المتراجحة **موجبين قطعا**.
- نركب الدالة ln على الطرفين.
- نستعمل الخاصية $\ln u^n = n\ln u$.
- نحل المعادلة أو المتراجحة المحصل عليها.

9 حدد أصغر عدد صحيح طبيعي يحقق $\left(\frac{3}{4}\right)^n < \frac{1}{100}$.

❑ طرفي المتراجحة موجبين قطعا : $n \in \mathbb{N}$ و $\frac{3}{4} > 0$ و منه $\left(\frac{3}{4}\right)^n > 0$ كما أن $\frac{1}{100} > 0$

❑ $\left(\frac{3}{4}\right)^n < \frac{1}{100}$ تكافئ $\ln\left[\left(\frac{3}{4}\right)^n\right] < \ln\left(\frac{1}{100}\right)$

تكافئ $n\ln\left(\frac{3}{4}\right) < (-\ln 100)$

تكافئ $n > \dfrac{-\ln 100}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}$ (*)

تكافئ $n > 16,01$


ln تزايدية قطعا : $\ln x < \ln y \Leftrightarrow x < y$

الأعداد الصحيحة الطبيعية التي تحقق $n > 16,01$ هي 17، 18، 19، ...

إذن أصغر عدد صحيح طبيعي يحقق $\left(\frac{3}{4}\right)^n < \frac{1}{100}$ أي $n > 16,01$ هو 17.

$n\ln\left(\frac{3}{4}\right) < -\ln 100$ (*) تكافئ $n > \dfrac{-\ln 100}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}$ لأن $\frac{3}{4} < 1$ إذن $\ln\frac{3}{4} < \ln 1$ أي $\ln\frac{3}{4} < 0$

◄ عندما نحل متراجحة، يمكن أن نقوم بالقسمة على $\ln a$ (هنا $a = \frac{3}{4}$) ؛ يجب أن نكون حذرين ! : إذا كان $a > 1$ فإن $\ln a > 0$ ، فإننا نحافظ على رمز المتراجحة لكن إذا كان $0 < a < 1$ فإن $\ln a < 0$ ، فإننا <u>نغير</u> رمز المتراجحة (مثلا الرمز " < " يتحول إلى " > ").

تمرّن : 1. حدد أصغر عدد صحيح طبيعي يحقق: $\left(\frac{8}{9}\right)^n < \frac{3}{10}$.

2. حدد أكبر عدد صحيح طبيعي يحقق: $1-0,79^n \leq 0,9$

جواب : 1. $n=11$ 2. $n=9$

طريقة 6 : كيف نحل نظمة معرفة بدلالة ln

- نحدد $\mathscr{D}$ **حيز تعريف النظمة** .
- **نحول النظمة** (باستعمال خاصيات الدالة ln مثل: $\ln(xy)=\ln x+\ln y$ ...) إلى نظمة مألوفة
- **نقبل فقط الحلول التي تنتمي إلى** $\mathscr{D}$: نقصي كل حل لا ينتمي إلى $\mathscr{D}$.

10 حل في $\mathbb{R}$ النظمات التالية :

a. $(S_1)\begin{cases}x-y=e-1\\ \ln x-\ln y=1\end{cases}$ ، b. $(S_2)\begin{cases}\ln x+\ln y=3\\ 3\ln x-\ln y=1\end{cases}$.

a. (S_1) معرفة إذا و فقط إذا كان $x>0$ و $y>0$.

$\begin{cases}x-y=e-1\\ \ln x-\ln y=1\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}x-y=e-1\\ \ln\frac{x}{y}=\ln e\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}x-y=e-1\\ \frac{x}{y}=e\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}x-y=e-1 & (1)\\ x=ey & (2)\end{cases}$

نعوض x بـ ey في (1) ، نحصل على $\begin{cases}ey-y=e-1\\ x=ey\end{cases}$ أي $\begin{cases}y(e-1)=e-1\\ x=ey\end{cases}$

$\begin{cases}y=\frac{e-1}{e-1}=1\\ x=ey=e\times1=e\end{cases}$ (*) ، $1>0$ و $e>0$

إذن مجموعة حلول النظمة هي $S=\{(e,1)\}$.

(*) يجب أن نتحقق من أن قيم x و y التي حصلنا عليها، تنتمي إلى حيز تعريف النظمة .

b. (S_2) معرفة إذا و فقط إذا كان $x>0$ و $y>0$.

نضع $X=\ln x$ و $Y=\ln y$ ومنه $\begin{cases}\ln x+\ln y=3\\ 3\ln x-\ln y=1\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}X+Y=3 & (1)\\ 3X-Y=1 & (2)\end{cases}$

من $(1)+(2)$ نحصل على $\begin{cases}X+Y=3\\ 4X=4\end{cases}$ أي $\begin{cases}X+Y=3\\ X=1\end{cases}$ إذن $\begin{cases}1+Y=3\\ X=1\end{cases}$ أي $\begin{cases}X=1\\ Y=2\end{cases}$

ومن $X=\ln x$ و $Y=\ln y$ نحصل على $\begin{cases}\ln x=1\\ \ln y=2\end{cases}$ أي $\begin{cases}\ln x=\ln e\\ \ln y=\ln e^2\end{cases}$ إذن $\begin{cases}x=e\\ y=e^2\end{cases}$

$e>0$ و $e^2>0$ إذن مجموعة حلول النظمة هي $S=\{(e,e^2)\}$.

تمرّن : $\begin{cases}x+y=1\\ \ln(-x)=\ln2+\ln y\end{cases}$.

جواب : $S=\varnothing$.